Ueber den Sinn der Windung in den singulären Puncten einer Raumcurve.

Von Otto Staude *in Rostock.*

Die analytische Unterscheidung rechts und links gewundener Elemente einer Raumcurve ist kürzlich von Herrn Kneser* eingehend untersucht worden, soweit es sich um reguläre Puncte der Curve handelt. Die vorliegende Mittheilung dehnt diese Untersuchung auf singuläre Puncte aus.

Die Schwierigkeit liegt dabei in der Durchführung gewisser Vorzeichenbestimmungen, für welche indessen ein einfacher Grundgedanke maassgebend ist. Wenn nämlich bei der Untersuchung der Bahncurve eines bewegten Punctes in einer geraden Linie, in einer Ebene oder im Raume neben anderen Bestimmungsstücken das doppelte Vorzeichen benutzt wird, so kann dies nach folgender Stufenfolge geschehen. In der *Geraden* entscheidet das Vorzeichen über die beiden entgegengesetzten Richtungen, welche die Tangente der Bahncurve haben kann oder, anders ausgedrückt, über den *Sinn der Linearfortschreitung.* In der *Ebene*, wo die ∞^1 möglichen Richtungen der Tangente der Bahncurve durch einen Winkel (2 Richtungscosinus) bestimmt werden, entscheidet das Vorzeichen über die beiden bei gegebener Tangente noch möglichen Richtungen der Normale oder, was auf dasselbe hinauskommt, über den *Sinn der Krümmung.* Im *Raume*, wo die ∞^2 möglichen Richtungen der Tangente der Bahncurve durch zwei Winkel (3 Richtungscosinus) und die bei gegebener Tangente möglichen ∞^1 Richtungen der Hauptnormale durch einen Winkel bestimmt werden, entscheidet das Vorzeichen über die beiden bei gegebener Tangente und Hauptnormale noch möglichen Richtungen der Binormale oder über den *Sinn der Windung* (Torsion).

---

* Bemerkungen über die Frenet-Serret'schen Formeln etc., Journal für die reine und angew. Mathematik, Bd. 113, S. 89.

Dieses Princip ist im Folgenden überall festgehalten und mit den Bedingungen der singulären Puncte verknüpft worden. Nach den einleitenden Festsetzungen des §1 und §2 und der Eintheilung der singulären Puncte in §3, werden zunächst in §4 für die singulären Puncte charakterische Coordinatensysteme eingeführt, welche der weiteren Discussion als Grundlage dienen. Hierauf wird in §5 die Bedeutung der Vorzeichen der aus den Differentialquotienten der 3 Coordinaten des Curvenpunctes nach dem Parameter gebildeten dreireihigen Determinanten entwickelt, deren erste, nur 1., 2. und 3. Differentialquotienten enthaltende, in gleichem Sinne von Kneser* betrachtet und deren Verschwinden als Kriterium der singulären Puncte überhaupt von Fine† untersucht worden ist. In §6 endlich werden die Hauptresultate in einer Tabelle zusammengefasst und weiter erläutert.

Obwohl die angewandte Methode bei n-Dimensionen und bei beliebiger Ordnung der singulären Puncte sich durchführen lässt, beschränkt sich die gegenwärtige Mittheilung auf die zur Charakterisirung der Methode ausreichenden 8 Fälle des gewöhnlichen Raumes, welche nach v. Staudt's Vorgange von Ch. Wiener‡ besprochen und in Modellen|| zur Darstellung gebracht worden sind.

§1. *Festsetzung über den Sinn eines Axensystems, einer Drehung und einer Windung.*

Um den Anfangspunct O eines rechtwinkligen Axensystems $Oxyz$ im Raume denken wir uns eine Kugel beschrieben und den Umfang des sphärischen Dreiecks, welches die 3 positiven Halbaxen Ox, Oy, Oz auf der Aussenfläche der Kugel bestimmen, in der Reihenfolge x, y, z der 3 Ecken durchlaufen. Jenachdem diese Durchlaufung dem Drehungssinn des Uhrzeigers entgegengesetzt oder mit ihm übereinstimmend ist, nennen wir das Axensystem $Oxyz$ positiv oder negativ orientirt. Wir benutzen in der Folge stets ein *positiv orientirtes Axensystem* $Oxyz$ als Coordinatensystem.§

---

*a. a. O. S. 96.

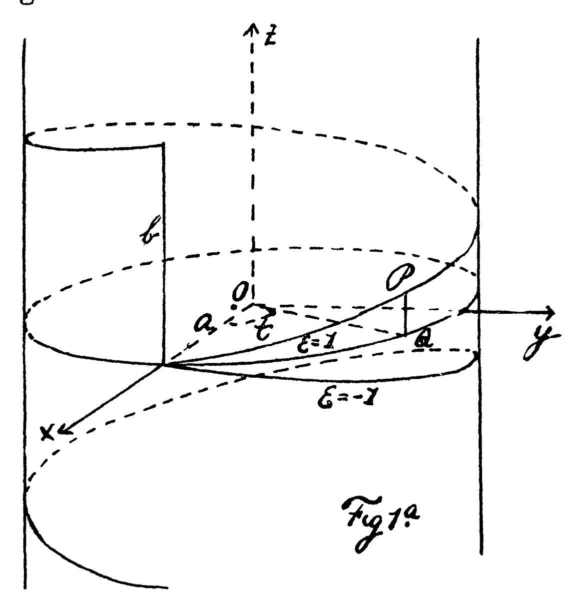
† On the Singularities of Curves of Double Curvature, American Journal of Mathematics, Vol. VIII, S. 175.

‡ Die Abhängigkeit der Rückkehrelemente der Projectionen einer unebenen Curve von denen der Curve selbst, Schlömilch's Zeitschrift, Bd. 25, S. 95.

|| Acht Modelle über die Abhängigkeit der Rückkehrelemente etc., Verlag von L. Brill in Darmstadt.

§ Übereinstimmend mit Kneser, a. a. O., S. 91.

In Bezug auf ein solches sei (vergl. Fig. 1a) $P = x, y, z$ ein laufender Punct und $Q = x, y$ seine Projection auf die xy-Ebene. Ferner sei t der Winkel des Strahles OQ gegen die positive x-Axe und zwar wachse derselbe, von der positiven z-Axe aus gesehen, im *positiven Drehungssinne*, welchen wir stets dem des Uhrzeigers entgegengesetzt annehmen.



Alsdann stellen die Gleichungen:

$$x = a\cos t, \quad y = a\sin t, \quad z = \varepsilon\frac{bt}{2\pi}, \qquad \varepsilon = \pm 1 \tag{1}$$

eine Schraubenlinie vom Radius a und der Ganghöhe b dar, welche positiv oder negativ gewunden ist, jenachdem $\varepsilon = +1$ oder $\varepsilon = -1$ genommen wird. Um nämlich den Sinn der Windung zu definiren, betrachten wir die Schraubenlinie in der Richtung ihrer Axe und lassen sie von einem Puncte in solcher Weise durchlaufen, dass uns seine drehende Bewegung um die Axe positiv erscheint: jenachdem dann seine fortschreitende Bewegung längs der Axe auf uns zu oder von uns wegführt, nennen wir die Schraubenlinie *positiv oder negativ gewunden.** Lassen wir nun in (1) den Parameter t wachsen, so bewegt sich der laufende Punct P von der positiven z-Axe aus gesehen (vgl. Fig. 1a) im positiven Drehungssinne, während gleichzeitig z wächst für $\varepsilon = 1$ und abnimmt für $\varepsilon = -1$, so dass die über die Schraubenlinie (1) gemachte Angabe unserer Definition ent-

* Wie bei Kneser, a. a. O., S. 100.

spricht. Bei abnehmendem t würden wir, von der negativen z-Axe aus zusehend, den gleichen Sinn der Windung finden.

§2. *Die positive Durchlaufungsrichtung einer Curve und die Nachbarpuncte eines Punctes.*

Durch die Gleichungen:

$$x=\phi(t), \quad y=\psi(t), \quad z=\chi(t), \tag{2}$$

bezogen auf das in §1 eingeführte Coordinatensystem $Oxyz$, sei eine Raumcurve gegeben. Den Parameter t, der für die ganze Betrachtung derselbe bleiben soll, denken wir uns etwa als Zeit gedeutet und die Curve (2) dem entsprechend als Bahncurve eines bewegten Punctes x, y, z. Als *positive Durchlaufungsrichtung der Curve* im Bereiche eines Punctes P derselben bezeichnen wir diejenige, welche einer wachsenden Bewegung des Parameters t, bezüglich der fortschreitenden Zeit entspricht.

Wir setzen voraus, dass im Bereiche des Punctes P, also für hinreichend kleine absolute Werthe der Grösse τ die Taylor'sche Entwicklung:

$$\begin{aligned}\phi(t+\tau) &= \phi(t)+\phi'(t).\tau+\tfrac{1}{2}\phi''(t).\tau^2+\dots \\ &= x+x'\tau+\tfrac{1}{2}x''\tau^2+\dots,\end{aligned} \tag{3}$$

sowie die entsprechenden für y und z gelten. Darnach betrachten wir eine Reihe in der positiven Durchlaufungsrichtung auf P folgender Nachbarpuncte $P_1, P_2, P_3, \dots$ mit den Coordinaten:

$$\left.\begin{array}{l} x_1=x+x'\tau_1, \quad y_1=y+y'\tau_1, \quad z_1=z+z'\tau_1, \\ x_2=x+x'\tau_2+\tfrac{1}{2}x''\tau_2^2, \quad y_2=y+y'\tau_2+\tfrac{1}{2}y''\tau_2^2, \dots \\ x_3=x+x'\tau_3+\tfrac{1}{2}x''\tau_3^2+\tfrac{1}{6}x'''\tau_3^3, \dots, \dots, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{array}\right\} \tag{4}$$

und ebenso eine Reihe vorangehender Nachbarpuncte $P_{-1}, P_{-2}, P_{-3}, \dots$ mit den Coordinaten:

$$\left.\begin{array}{l} x_{-1}=x-x'\tau_1, \quad y_{-1}=y-y'\tau_1, \quad z_{-1}=z-z'\tau_1, \\ x_{-2}=x-x'\tau_2+\tfrac{1}{2}x''\tau_2^2, \quad y_{-2}=y-y'\tau_2+\tfrac{1}{2}y''\tau_2^2, \dots, \\ x_{-3}=x-x'\tau_3+\tfrac{1}{2}x''\tau_3^2-\tfrac{1}{6}x'''\tau_3^3, \dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{array}\right\} \tag{4}$$

Diesen Angaben liegt die Vorstellung zu Grunde, dass bei einem vorgegebenen

gemeinsamen Genauigkeitsgrade von den kleinen *positiven Grössen* $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \ldots$ beziehungsweise die 2., 3., 4., ... Potenzen vernachlässigt werden können.

§3. *Classification der Curvenpuncte.*

Mit Rücksicht auf die Lage der Nachbarpuncte $P_1, P_2, P_3, \ldots$ nehmen wir nun eine Classification der Puncte P der Curve (2) vor. Wir suchen nämlich, von P ausgehend, den nächsten Nachbarpunct $P_i (i = 1, 2, 3, \ldots)$, der aus dem Puncte P heraustritt, hierauf den nächsten Nachbarpunct $P_{i+\varkappa} (\varkappa = 1, 2, 3, \ldots)$, der aus den Geraden PP_i heraustritt, endlich den nächsten, der aus der Ebene $PP_iP_{i+\varkappa}$ heraustritt. Auf Grund dieses Verfahrens* erhalten wir folgende Eintheilung:

(5)

- I. P_1 nicht im Puncte P.
  - A. P_2 nicht in der Geraden PP_1.
    - a. P_3 nicht in der Ebene PP_1P_2;
    - b. P_3 (aber nicht P_4) in der Ebene PP_1P_2.
  - B. P_2 (aber nicht P_3) in der Geraden PP_1.
    - a. P_4 nicht in der Ebene $P_1P_2P_3$;
    - b. P_4 (aber nicht P_5) in der Ebene $P_1P_2P_3$.
- II. P_1 (aber nicht P_2) im Puncte P.
  - A. P_3 nicht in der Geraden P_1P_2.
    - a. P_4 nicht in der Ebene $P_1P_2P_3$;
    - b. P_4 (aber nicht P_5) in der Ebene $P_1P_2P_3$.
  - B. P_3 (aber nicht P_4) in der Geraden P_1P_2.
    - a. P_5 nicht in der Ebene $P_2P_3P_4$;
    - b. P_5 (aber nicht P_6) in der Ebene $P_2P_3P_4$.

Diese Eintheilung kann nach jedem der 3 Eintheilungsgründe, also in den Richtungen a, b, ...; A, B, ... und I, II, ... weiter fortgesetzt werden. Wir begnügen uns jedoch mit der näheren Betrachtung der in der Tabelle (5) wirklich aufgeführten 8 Fälle, derselben, auf welche sich die oben erwähnten Wiener'schen Modelle beziehen (vgl. unten §6).

---

* Nach Fine, a. a. O., §2, S. 160.

§4. *Die charakteristischen Coordinatensysteme.*

In den Fällen I dürfen nach (4) die Grössen x', y', z' für den Punct P nicht alle drei verschwinden. Wir definiren die positive Tangente t (von dem gleichbezeichneten Parameter t in (2) zu unterscheiden) im Puncte P, übereinstimmend mit der positiven Durchlaufungsrichtung der Curve, als die von P nach P_1 hin laufende Gerade. Ihre Richtungscosinus sind nach (4):

$$\alpha = \frac{x'}{s'}, \quad \beta = \frac{y'}{s'}, \quad \gamma = \frac{z'}{s'}, \quad s' = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}, \tag{6}$$

wo die doppelt gestrichene Quadratwurzel immer deren absoluten Werth bezeichnet. Nach (4) liegt P_{-1} ebenfalls auf t und fällt die Richtung von P_{-1} nach P mit der Richtung (6) von t zusammen. Die Puncte P_{-1}, P, P_1 folgen also auf der Tangente in deren positiver Richtung aufeinander:

Der laufende Punct der Curve ändert an der Stelle P den Sinn seiner Linearfortschreitung nicht.

In den Fällen I, A dürfen die Bedingungen $x' : y' : z' = x'' : y'' : z''$ nicht erfüllt sein. Die Schmiegungsebene Σ ist als Verbindungsebene der Puncte P, P_1, P_2 bestimmt und mit ihr Hauptnormale h ($\perp t$ in Σ) und Binormale b ($\perp \Sigma$), beide zunächst ohne Pfeilspitzen. Wir bestimmen die letzteren aus den beiden Bedingungen, dass erstens das vom Puncte P ausgehende Coordinatensystem $\xi = t$, $\eta = h$, $\zeta = b$ positiv orientirt und zweitens P_2 auf der positiven Seite der Ebene bt, d. h. auf der Seite der positiven Hauptnormale h gelegen sei. Aus diesen Bedingungen ergeben sich als Richtungscosinus der positiven Hauptnormale:

$$\alpha^{\cdot} = \rho\,\frac{s'x'' - x's''}{s'^3}, \quad \beta^{\cdot} = \rho\,\frac{s'y'' - y's''}{s'^3}, \quad \gamma^{\cdot} = \rho\,\frac{s'z'' - z's''}{s'^3} \tag{7}$$

und der positiven Binormale:

$$\alpha^{\cdot\cdot} = \rho\,\frac{y'z'' - z'y''}{s'^3}, \quad \beta^{\cdot\cdot} = \rho\,\frac{z'x'' - x'z''}{s'^3}, \quad \gamma^{\cdot\cdot} = \rho\,\frac{x'y'' - y'x''}{s'^3}, \tag{7}$$

wobei die positive Grösse ρ durch die Gleichung

$$\frac{s'^3}{\rho} = \sqrt{(y'z'' - z'y'')^2 + (z'x'' - x'z'')^2 + (x'y'' - y'x'')^2} = s'\sqrt{x''^2 + y''^2 + z''^2 - s''^2},$$

definirt ist. Denn mit den in (6) und (7) angegebenen Richtungscosinus ist erstens die Determinante:

$$\begin{vmatrix} \alpha & \alpha^{\cdot} & \alpha^{\cdot\cdot} \\ \beta & \beta^{\cdot} & \beta^{\cdot\cdot} \\ \gamma & \gamma^{\cdot} & \gamma^{\cdot\cdot} \end{vmatrix} = +1$$

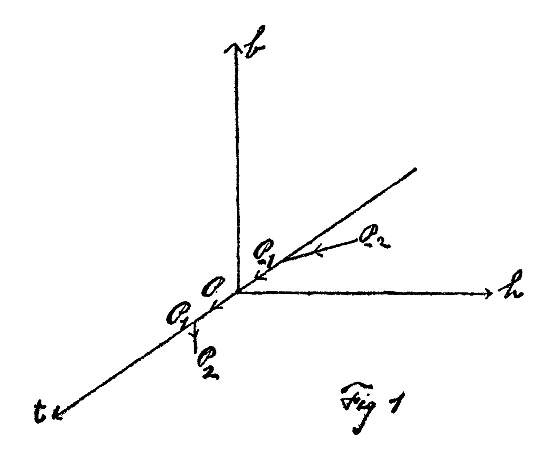
und zweitens die η-Coordinate des Punctes P_2:

$$\eta_2 = \alpha^{\cdot}(x_2 - x) + \beta^{\cdot}(y_2 - y) + \gamma^{\cdot}(z_2 - z) = \tfrac{1}{2}\,\frac{s'^2}{\rho}\,\tau_2^2$$

positiv. Beiläufig ergiebt sich, dass auch der Punct P_{-2} mit:

$$\eta_{-2} = \tfrac{1}{2}\,\frac{s'^2}{\rho}\,\tau_2^2$$

auf der positiven Seite der Ebene $\zeta\xi$ liegt.



Das durch (6) *und* (7) *bestimmte Coordinatensystem thb* (*vgl. Fig.* 1) *ist allen Fällen I, A charakteristisch.*

(Die Figur stellt nur schematisch die Lage der Axen gegen die Curvenpuncte dar und giebt nicht das thatsächliche Längenverhältniss der Strecken PP_1 und P_1P_2 (vgl. §2) wieder.)

In den Fällen I, B sind die Bedingungen $x' : y' : z' = x'' : y'' : z''$ erfüllt, womit die Puncte $P_{\pm 2}$ in die Tangente t zu liegen kommen. Die Formeln (6) behalten ihre Gültigkeit, können aber jetzt noch in anderer Weise dargestellt werden. Es sei nämlich, zufolge der Voraussetzung, mit einem Proportionalitätsfactor εx^2 $(\varepsilon = \pm 1)$:

$$x'' = \varepsilon x^2 x', \quad y'' = \varepsilon x^2 y', \quad z'' = \varepsilon x^2 z'. \tag{8}$$

Setzen wir diese Werthe in die aus der quadrirten letzten Gleichung (6) durch Differentiation nach t folgende Gleichung:

$$s's'' = x'x'' + y'y'' + z'z'' \tag{6'}$$

ein, so erhalten wir mit Weglassung des Factors s':

$$s'' = \varepsilon\varkappa^2 s' \tag{8}$$

und damit für die Gleichungen (6) die aequivalente Form:

$$\alpha = \frac{x''}{s''}, \quad \beta = \frac{y''}{s''}, \quad \gamma = \frac{z''}{s''}; \quad s'' = \varepsilon\sqrt{x''^2 + y''^2 + z''^2}. \tag{9}$$

Zugleich reducirt sich die aus (6′) folgende Gleichung:

$$s's''' + s''^2 = x'x''' + x''^2 + y'y''' + y''^2 + z'z''' + z''^2 \tag{6''}$$

nach (8) und (9) auf:

$$s''s''' = x''x''' + y''y''' + z''z'''. \tag{8'}$$

Während nun die Schmiegungsebene Σ im Puncte P_1 mit der Gleichung:

$$(X-x)(y'z''-z'y'') + (Y-y)(z'x''-x'z'') + (Z-z)(x'y''-y'x'') = \Sigma(t) = 0$$

in laufenden Coordinaten X, Y, Z in Bezug auf das Coordinatensystem $Oxyz$, unbestimmt und die Formeln (7) unbrauchbar werden, sind die vereinigten Schmiegungsebenen $\Sigma_{\pm 1}$ der Puncte $P_{\pm 1}$ als Verbindungsebenen der Puncte P_1, P_2, P_3 und P_{-1}, P_{-2}, P_{-3} gegeben oder durch die Gleichung:

$$\Sigma(t) \pm \Sigma'(t) . \tau_1 = 0,$$

die sich auf:

$$(X-x)(y'z'''-z'y''')+\ldots.+\ldots.=0 \text{ oder } (X-x)(y''z'''-z''y''')+\ldots.+\ldots.=0$$

reducirt. Zugleich sind die Hauptnormalen $h_{\pm 1}$ ($\perp t$ in $\Sigma_{\pm 1}$) und Binormalen $b_{\pm 1}$ ($\perp \Sigma_{\pm 1}$) bis auf die Pfeilspitzen bestimmt. Die letzteren definiren wir durch die beiden Bedingungen, dass erstens jedes der beiden Coordinatensysteme $\zeta_\pm = t$, $\eta_\pm = h_{\pm 1}$, $\zeta_\pm = b_{\pm 1}$ positiv orientirt und zweitens P_3 auf der positiven Seite der Ebene $b_1 t$ und P_{-3} auf der positiven Seite der Ebene $b_{-1}t$ gelegen sei. Aus diesen Bedingungen ergeben sich mit Rücksicht auf (8′) als Richtungscosinus der positiven Hauptnormalen $h_{\pm 1}$:

$$\alpha^{\cdot}_{\pm 1} = \pm\lambda\frac{s''x''' - x''s'''}{s''^2}, \quad \beta^{\cdot}_{\pm 1} = \pm\lambda\frac{s''y''' - y''s'''}{s''^2}, \quad \gamma^{\cdot}_{\pm 1} = \pm\lambda\frac{s''z''' - z''s'''}{s''^2} \tag{10}$$

und der positiven Binormalen $b_{\pm 1}$:

$$\alpha^{\cdot\cdot}_{\pm 1} = \pm\,\lambda\,\frac{y''z''' - z''y'''}{s''^3},\quad \beta^{\cdot\cdot}_{\pm 1} = \pm\,\lambda\,\frac{z''x''' - x''z'''}{s''^3},\quad \gamma^{\cdot\cdot}_{\pm 1} = \pm\,\lambda\,\frac{x''y''' - y''x'''}{s''^3}, \quad (10)$$

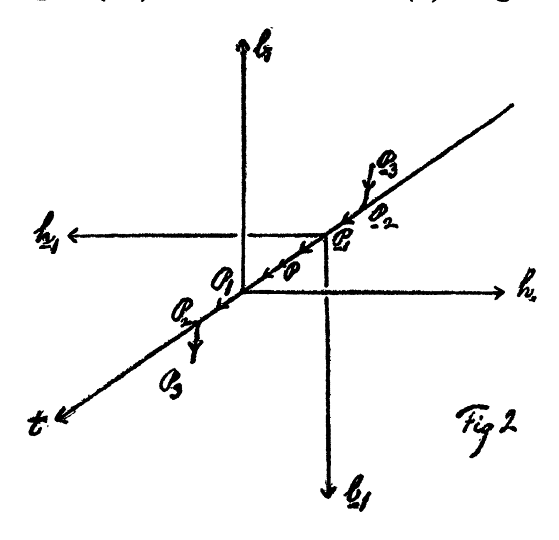
wobei die positive Grösse λ durch die Gleichung:

$$\frac{\varepsilon s''^3}{\lambda} = \sqrt{(y''z''' - z''y''')^2 + (z''x''' - x''z''')^2 + (x''y''' - y''x''')^2} = \varepsilon s''\sqrt{x'''^2 + y'''^2 + z'''^2 - s'''^2}$$

definirt ist und, *wie auch im Folgenden immer, je alle oberen und alle unteren Vorzeichen jeder Zeile zusammengehören.* Denn mit den Werthen (9) und (10) werden die beiden Determinanten $|\alpha\beta^{\cdot}_{\pm 1}\gamma^{\cdot\cdot}_{\pm 1}| = +1$ und die zweite Coordinate η_3 des Punctes P_3 im ersten und η_{-3} des Punctes P_{-3} im zweiten der erwähnten Coordinatensysteme:

$$\eta_{\pm 3} = \alpha^{\cdot}_{\pm 1}(x_{\pm 3} - x) + \beta^{\cdot}_{\pm 1}(y_{\pm 3} - y) + \gamma^{\cdot}_{\pm 1}(z_{\pm 3} - z) = \tfrac{1}{6}\,\frac{s''^2}{\lambda}\,\tau_3^3$$

positiv. Die Gleichungen (10) sind von dem in (8) eingeführten ε unabhängig.



Die durch (9) *und* (10) *bestimmten Coordinatensysteme* th_1b_1 *und* $th_{-1}b_{-1}$ (*vgl. Fig.* 2) *sind allen Fällen I, B charakteristisch.*

In den Fällen II verschwinden die Grössen x', y', z' für den Punct P und wird mit dem Zusammenfall der Puncte P_1 und P die Tangente $t = PP_1$, sowie die Normalebene:

$$(X - x)\,x' + (Y - y)\,y' + (Z - z)\,z' = N(t) = 0$$

unbestimmt. Dagegen haben wir für die vereinigten Normalebenen $N_{\pm 1}$ der Puncte $P_{\pm 1}$:

$$N(t) \pm N'(t)\tau_1 = 0 \text{ oder } (X - x)x'' + \dots + \dots = 0$$

und, übereinstimmend mit der positiven Durchlaufungsrichtung der Curve, als positive Tangente t_1 in P_1 die Gerade von P_1 nach P_2 und als positive Tangente t_{-1} in P_{-1} die Gerade von P_{-2} nach P_{-1}. Ihre Richtungscosinus sind nach (4):

$$\alpha_{\pm 1} = \pm \frac{x''}{s''}, \quad \beta_{\pm 1} = \pm \frac{y''}{s''}, \quad \gamma_{\pm 1} = \pm \frac{z''}{s''}, \quad s'' = \sqrt{x''^2 + y''^2 + z''^2}; \tag{11}$$

wir bezeichnen die absolute Wurzel mit s'', weil die Gleichung (6'') sich jetzt auf: $s''^2 = x''^2 + y''^2 + z''^2$ reducirt. Zugleich folgt aus (6'') allgemein:

$$s's^{(4)} + 3s''s''' = x'x^{(4)} + 3x''x''' + y'y^{(4)} + 3y''y''' + z'z^{(4)} + 3z''z''' \tag{6'''}$$

und daher jetzt:

$$s''s''' = x''x''' + y''y''' + z''z'''. \tag{11'}$$

Die Puncte P_{-2}, P, P_2 folgen überdies mit $P_{-2} = P_2$ auf den vereinigten Tangenten $t_{\pm 1}$ rückläufig aufeinander:

Der laufende Punct der Curve ändert an der Stelle P den Sinn seiner Linearfortschreitung.

In den Fällen II, A dürfen die Bedingungen $x'' : y'' : z'' = x''' : y''' : z'''$ nicht erfüllt sein. Als vereinigte Schmiegungsebenen $\Sigma_{\pm 1}$ der Puncte $P_{\pm 1}$ betrachten wir die Verbindungsebenen der Puncte P_1, P_2, P_3 und P_{-1}, P_{-2}, P_{-3} mit der Gleichung:

$$(X - x)(y''z''' - z''y''') + \dots + \dots = 0.$$

Allerdings müssen wir, um diese Gleichung aus der Entwicklung:

$$\Sigma(t) + \Sigma'(t).\tau + \tfrac{1}{2}\Sigma''(t).\tau^2 + \dots = 0,$$

in der mit $x' = 0$, $y' = 0$, $z' = 0$ sowohl $\Sigma(t)$ als $\Sigma'(t)$ verschwinden, zu erhalten, $\tau = \pm \tau_2$ nehmen (vgl. §2). In dieser Auffassung würde also die eben definirte Schmiegungsebene $\Sigma_{\pm 1}$ nicht den Puncten $P_{\pm 1}$, sondern $P_{\pm 2}$ zugehören, was indessen an unseren Betrachtungen sonst nichts wesentliches ändert.

Mit den Schmiegungsebenen $\Sigma_{\pm 1}$ sind die Hauptnormalen $h_{\pm 1}$ ($\perp t_{\pm 1}$ in $\Sigma_{\pm 1}$) und Binormalen $b_{\pm 1}$ ($\perp \Sigma_{\pm 1}$) in $P_{\pm 1}$ bis auf die Pfeilspitzen bestimmt. Diese definiren wir durch die beiden Bedingungen, dass erstens jedes der beiden Coordinatensysteme $\xi_{\pm} = t_{\pm 1}$, $\eta_{\pm} = h_{\pm 1}$, $\zeta_{\pm} = b_{\pm 1}$ positiv orientirt sei und zweitens P_3 und P_{-3} auf der positiven Seite der Ebene $b_1 t_1$ und bezüglich $b_{-1} t_{-1}$ liegen.

Hieraus ergeben sich mit Rücksicht auf (11′) als Richtungscosinus der positiven Hauptnormalen $h_{\pm 1}$:

$$\alpha^{\cdot}_{\pm 1} = \pm \mu \frac{s''x''' - x''s'''}{s''^3}, \quad \beta^{\cdot}_{\pm 1} = \pm \mu \frac{s''y''' - y''s'''}{s''^3}, \quad \gamma^{\cdot}_{\pm 1} = \pm \mu \frac{s''z''' - z''s'''}{s''^3}, \qquad (12)$$

und der positiven Binormalen $b_{\pm 1}$:

$$\alpha^{\cdot\cdot}_{\pm 1} = \mu \frac{y''z''' - z''y'''}{s''^3}, \quad \beta^{\cdot\cdot}_{\pm 1} = \mu \frac{z''x''' - x''z'''}{s''^3}, \quad \gamma^{\cdot\cdot}_{\pm 1} = \mu \frac{x''y''' - y''x'''}{s''^3}, \qquad (12)$$

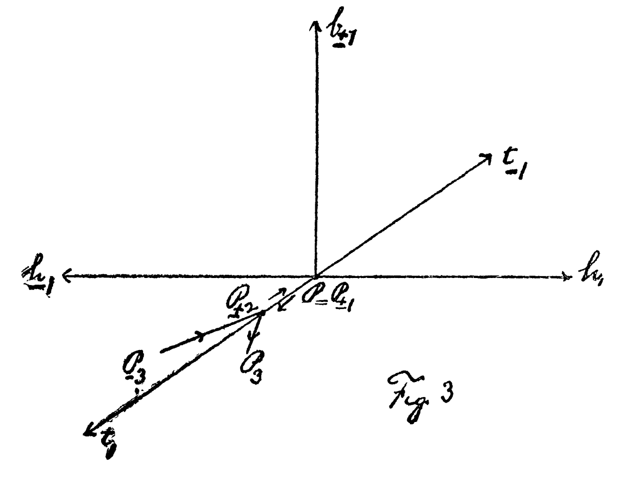
wo die positive Grösse μ durch die Gleichung:

$$\begin{aligned} \frac{s''^3}{\mu} &= \sqrt{(y''z''' - z''y''')^2 + (z''x''' - x''z''')^2 + (x''y''' - y''x''')^2} \\ &= s''\sqrt{x'''^2 + y'''^2 + z'''^2 - s'''^2} \end{aligned}$$

definirt ist. Denn es sind mit den Werthen (11) und (12) die beiden Determinanten $|\alpha_{\pm 1}\beta^{\cdot}_{\pm 1}\gamma^{\cdot\cdot}_{\pm 1}| = +1$ und

$$\eta_{\pm 3} = \alpha^{\cdot}_{\pm 1}(x_{\pm 3} - x) + \beta^{\cdot}_{\pm 1}(y_{\pm 3} - y) + \gamma^{\cdot}_{\pm 1}(z_{\pm 3} - z) = \tfrac{1}{6}\frac{s''^2}{\mu}\tau_3^3$$

positiv.



Die durch (11) *und* (12) *bestimmten Coordinatensysteme* $t_1 h_1 b_1$ *und* $t_{-1} h_{-1} b_{-1}$ (*vgl. Fig.* 3) *sind allen Fällen II, A charakteristisch.*

In den Fällen II, B sind die Bedingungen $x'' : y'' : z'' = x''' : y''' : z'''$ erfüllt, womit die Puncte $P_{\pm 3}$ in die Tangente $t_{\pm 1}$ zu liegen kommen. Die Formeln (11) behalten ihre Gültigkeit, können aber jetzt noch in anderer Weise dargestellt werden. Es sei nämlich mit einem Proportionalitätsfactor $\varepsilon\varkappa^2$ ($\varepsilon = \pm 1$):

$$x''' = \varepsilon\varkappa^2 x'', \quad y''' = \varepsilon\varkappa^2 y'', \quad z''' = \varepsilon\varkappa^2 z''. \qquad (13)$$

Setzen wir diese Werthe in (11') ein, so folgt mit Weglassung des Factors s'':

$$s''' = \varepsilon\varkappa^2 s''. \tag{13}$$

Wir erhalten so für die Gleichungen (11) die aequivalente Form:

$$\alpha_{\pm 1} = \frac{x'''}{s'''}, \quad \beta_{\pm 1} = \frac{y'''}{s'''}, \quad \gamma_{\pm 1} = \frac{z'''}{s'''}, \quad s''' = \varepsilon\sqrt{x'''^2 + y'''^2 + z'''^2}. \tag{14}$$

Zugleich folgt aus (6''') allgemein:

$$s's^{(5)} + 4s''s^{(4)} + 3s'''^2 = x'x^{(5)} + 4x''x^{(4)} + 3x'''^2 + \dots + \dots$$

und daher jetzt mit $x' = 0$, $y' = 0$, $z' = 0$, $s' = 0$ nach (13) und (14):

$$s'''s^{(4)} = x'''x^{(4)} + y'''y^{(4)} + z'''z^{(4)}. \tag{13'}$$

Während nun die Schmiegungsebenen $\Sigma_{\pm 1}$ in den Puncten $P_{\pm 1}$ unbestimmt und die Formeln (13) unbrauchbar werden, betrachten wir als vereinigte Schmiegungsebenen $\Sigma_{\pm 2}$ der Puncte $P_{\pm 2}$ die Verbindungsebenen der Puncte P_2, P_3, P_4 und P_{-2}, P_{-3}, P_{-4} mit der Gleichung:

$$(X - x)(y''z^{(4)} - z''y^{(4)}) + \dots + \dots = 0$$

$$\text{oder } (X - x)(y'''z^{(4)} - z'''y^{(4)}) + \dots + \dots = 0$$

(in dem unter II, A angemerkten Sinne den Puncten $P_{\pm 3}$ zugehörig). Mit ihnen sind die Hauptnormalen $h_{\pm 2}$ ($\perp t_{\pm 1}$ in $\Sigma_{\pm 2}$) und Binormalen $b_{\pm 2}$ ($\perp \Sigma_{\pm 2}$) der Puncte $P_{\pm 2}$ bis auf die Pfeilspitzen bestimmt. Diese definiren wir durch die Bedingungen, dass erstens jedes der beiden Coordinatensysteme $\xi_\pm = t_{\pm 1}$, $\eta_\pm = h_{\pm 2}$, $\zeta_\pm = b_{\pm 2}$ positiv orientirt sei und zweitens P_4 und P_{-4} auf der positiven Seite der Ebene $b_2 t_1$ und bezüglich $b_{-2} t_{-1}$ liegt. Hiernach ergeben sich mit Rücksicht auf (13') als Richtungscosinus der positiven Hauptnormalen $h_{\pm 2}$:

$$\dot\alpha_{\pm 2} = \nu\,\frac{s'''x^{(4)} - x'''s^{(4)}}{s'''^3}, \quad \dot\beta_{\pm 2} = \nu\,\frac{s'''y^{(4)} - y'''s^{(4)}}{s'''^3}, \quad \dot\gamma_{\pm 2} = \nu\,\frac{s'''z^{(4)} - z'''s^{(4)}}{s'''^3}, \tag{15}$$

und der positiven Binormalen $b_{\pm 2}$:

$$\ddot\alpha_{\pm 2} = \pm\nu\,\frac{y'''z^{(4)} - z'''y^{(4)}}{s'''^3}, \quad \ddot\beta_{\pm 2} = \pm\nu\,\frac{z'''x^{(4)} - x'''z^{(4)}}{s'''^3}, \quad \ddot\gamma_{\pm 2} = \pm\nu\,\frac{x'''y^{(4)} - y'''x^{(4)}}{s'''^3}, \tag{15}$$

wobei die positive Grösse ν durch die Gleichung:

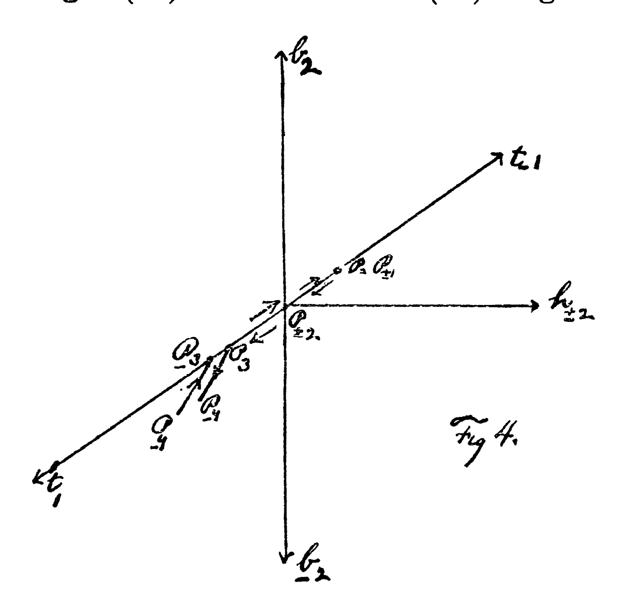
$$\frac{\varepsilon s'''^3}{\nu} = \sqrt{(y'''z^{(4)} - z'''y^{(4)})^2 + (z'''x^{(4)} - x'''z^{(4)})^2 + (x'''y^{(4)} - y'''x^{(4)})^2}$$

$$= \varepsilon s'''\sqrt{x^{(4)^2} + y^{(4)^2} + z^{(4)^2} - s^{(4)^2}}$$

definirt ist. Denn es sind mit diesen Werthen die beiden Determinanten $|\alpha_{\pm 1}\beta^{\cdot}_{\pm 2}\gamma^{\cdot\cdot}_{\pm 2}| = +1$ und

$$\eta_{\pm 4} = \alpha^{\cdot}_{\pm 2}(x_{\pm 4} - x) + \beta^{\cdot}_{\pm 2}(y_{\pm 4} - y) + \gamma^{\cdot}_{\pm 2}(z_{\pm 4} - z) = \frac{1}{24}\frac{s'''^2}{\nu}\tau_4^4$$

positiv. Die Gleichungen (15) sind von dem in (13) eingeführten ε unabhängig.



Die durch (14) *und* (15) *bestimmten Coordinatensysteme* $t_1 h_2 b_2$ *und* $t_{-1} h_{-2} b_{-2}$ (*vgl. Fig.* 4) *sind allen Fällen II, B charakteristisch.*

§5. *Der Sinn der Windung.*

In den Figuren 1–4 ist die Curve an der Stelle P nach vorwärts und rückwärts je soweit dargestellt, dass sie bereits mit einem Elemente aus der Tangente heraustritt, also eine Krümmung zeigt oder, anders ausgedrückt, dass der im Sinne des wachsenden Parameters t laufende Punct der Curve vor und nach der Stelle P eine *drehende Bewegung um die zur Binormale parallele Krümmungsaxe* ausführt. Die charakteristischen Coordinatensysteme des §4 sind aber sämmtlich so gewählt, *dass diese drehende Bewegung, von der jeweiligen positiven Binormale aus gesehen, positiv erscheint.*

Nehmen wir jetzt nach vorwärts und rückwärts noch das nächste aus der Schmiegungsebene heraustretende Curvenelement hinzu, so wird der laufende Punct der Curve vor und nach der Stelle P bereits *eine fortschreitende Bewegung*

in der Richtung der Krümmungsaxe zeigen. Es wird daher, mit Verallgemeinerung der in §1 für die Schraubenlinie gegebenen Definition, *die Windung der Curve* (2) *in dem auf P folgenden Curvenelement positiv oder negativ sein, jenachdem der aus der Schmiegungsebene heraustretende Punct auf deren positiver oder negativer Seite liegt, und die Windung in dem vor P vorausgehenden Curvenelement positiv oder negativ sein, jenachdem der noch nicht in die Schmiegungsebene eingetretene Punct auf deren negativer oder positiver liegt.*

Wir wollen diese allgemeinen Bemerkungen auf die einzelnen Fälle anwenden.

In Bezug auf das Coordinatensystem $\xi = t$, $\eta = h$, $\zeta = b$ der Fälle I, A (vgl. Fig. 1) ist für die unter I, A, a zunächst aus der Schmiegungsebene $\xi\eta$ heraustretenden Puncte $P_{\pm 3}$:

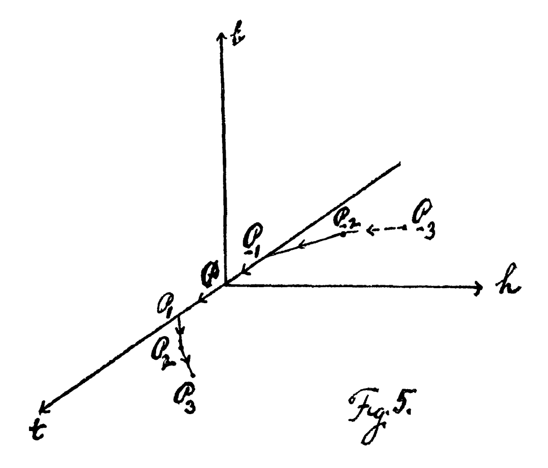
$$\zeta_{\pm 3} = \alpha^{\cdot\cdot}(x_{\pm 3} - x) + \beta^{\cdot\cdot}(y_{\pm 3} - y) + \gamma^{\cdot\cdot}(z_{\pm 3} - z)$$

oder nach (7):

$$\zeta_{\pm 3} = \frac{\rho}{s'^3} \begin{vmatrix} x_{\pm 3} - x & x' & x'' \\ y_{\pm 3} - y & y' & y'' \\ z_{\pm 3} - z & z' & z'' \end{vmatrix} = \pm \tfrac{1}{6} \frac{\rho}{s'^3} \Delta \tau_3^3,$$

wenn wir zur Abkürzung setzen:

$$\Delta = \begin{vmatrix} x' & x'' & x''' \\ y' & y'' & y''' \\ z' & z'' & z''' \end{vmatrix} = |x'y''z'''| = \Delta_{123}. \tag{16}$$



Wenn daher $\Delta > 0$ (vgl. Fig. 5, wo das punctirte Element $P_{-3}P_{-2}$ unterhalb der horizontalen *th*-Ebene liegen soll), liegt P_3 auf der positiven, P_{-3} auf der

negativen Seite der Schmiegungsebene, wenn $\Delta < 0$, umgekehrt. Es ist also nach der vorausgeschickten Definition die Windung der Curve im Puncte P nach beiden Seiten hin positiv oder negativ, jenachdem $\Delta > 0$ oder < 0 oder wie wir kurz sagen können:

Für I, A, a ist die Windung der Curve im Puncte P positiv oder negativ, jenachdem $\Delta > 0$ *oder* < 0.

In der That ist auch für die in (1) definirte Schraubenlinie die Determinante

$$\Delta = \varepsilon \frac{a^2 b}{2\pi}$$

vom Vorzeichen ε (vgl. §1).

Sind dagegen, wie unter I, A, b, die Puncte $P_{\pm 3}$ in der Schmiegungsebene gelegen, also $\Delta = 0$, so ergiebt sich in Bezug auf das für alle Fälle I, A zu benutzende Coordinatensystem *thb* (vgl. Fig. 1) für die zunächst heraustretenden Puncte $P_{\pm 4}$:

$$\zeta_{\pm 4} = \alpha^{\cdot\cdot}(x_{\pm 4} - x) + \ldots\ldots + \ldots\ldots = \tfrac{1}{24} \frac{\rho}{s'^3} \Delta_{124} \tau_4^4,$$

wo Δ_{124} die Determinante:

$$\Delta_{124} = |x' y'' z^{(4)}| = \Delta', \tag{17}$$

den Differentialquotienten von Δ bedeutet. Nach unserer Definition ergiebt sich daher, dass bei positivem Δ_{124} die Windung in dem auf P folgenden Curvenelement positiv, im vorhergehenden negativ ist. Im Puncte P werden wir die *Windung als null* bezeichnen, da die 4 Puncte $PP_1P_2P_3$ in einer Ebene liegen. Wir fassen das Resultat in den Satz zusammen:

Für I, A, b ist die Windung der Curve unmittelbar vor dem Puncte P negativ und unmittelbar nach dem Puncte P positiv oder umgekehrt, jenachdem $\Delta_{124} > 0$ *oder* < 0.

In Bezug auf die Coordinatensysteme $\xi_{\pm} = t$, $\eta_{\pm} = h_{\pm 1}$, $\zeta_{\pm} = b_{\pm 1}$ der Fälle I, B (vgl. Fig. 2) ist für die unter I, B, a zunächst aus der Schmiegungsebene $th_{\pm 1}$ heraustretenden Puncte $P_{\pm 4}$:

$$\zeta_{\pm 4} = \alpha^{\cdot\cdot}_{\pm 1}(x_{\pm 4} - x) + \beta^{\cdot\cdot}_{\pm 1}(y_{\pm 4} - y) + \gamma^{\cdot\cdot}_{\pm 1}(z_{\pm 4} - z),$$

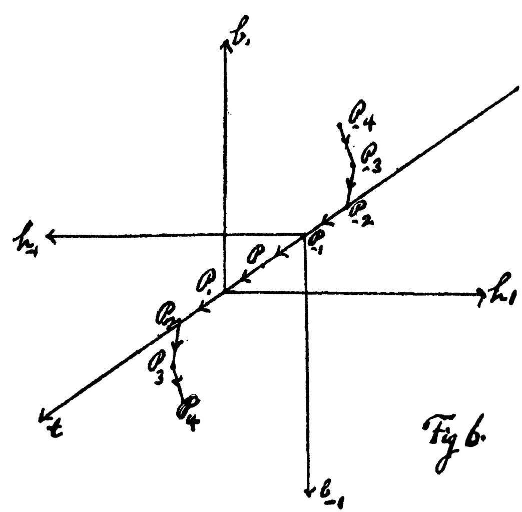
wo wie immer je alle oberen und alle unteren Vorzeichen zusammengehören, oder nach (10):

$$\zeta_{\pm 4} = \pm \tfrac{1}{24} \frac{\lambda}{s''^3} |x'' y''' z^{(4)}| \tau_4^4 = \pm \tfrac{1}{24} \frac{\lambda}{s' s''^2} |x' y''' z^{(4)}| \tau_4^4 = \pm \tfrac{1}{24} \frac{\lambda}{s' s''^2} \Delta_{134} \tau_4^4.$$

Dabei bedeutet:

$$\Delta_{134} = |x' y''' z^{(4)}| = \Delta'' \tag{18}$$

den durch die Voraussetzung $x':y':z' = x'':y'':z''$ reducirten 2. Differentialquotienten $\Delta'' = |x'y''x^{(5)}| + |x'y'''z^{(4)}|$ von Δ. Es liegt daher bei positivem Δ_{134} (vgl. Fig. 6) P_4 auf der positiven Seite der Ebene th_1, P_{-4} auf der negativen der Ebene th_{-1} (in Fig. 6 P_4 und P_{-4} beide oberhalb der horizontalen Ebene $th_{\pm 1}$). Die Windung in P selbst ist 0, weil P, P_1, P_2 in gerader Linie liegen und folgt schliesslich:



Für I, B, a ist die Windung vor und nach dem Puncte P positiv oder negativ, jenachdem $\Delta_{134} > 0$ oder < 0.

Ist $\Delta_{134} = 0$, so reducirt sich die Gleichung:

$$\Delta''' = |x'y''z^{(6)}| + 2|x'y'''z^{(5)}| + |x''y'''z^{(4)}|$$

auf:

$$\tfrac{1}{2}\Delta''' = |x'y'''z^{(5)}| = \Delta_{135} \tag{19}$$

und wird für die 3. Coordinate des Punctes P_5 im System th_1b_1 und des Punctes P_{-5} im System $th_{-1}b_{-1}$:

$$\zeta_{\pm 5} = \tfrac{1}{120}\,\frac{\lambda}{s's''^2}\,\Delta_{135}\tau_5^5.$$

Es ergiebt sich somit:

Für I, B, b ist die Windung vor dem Puncte P negativ und nach ihm positiv oder umgekehrt, jenachdem $\Delta_{135} > 0$ oder < 0.

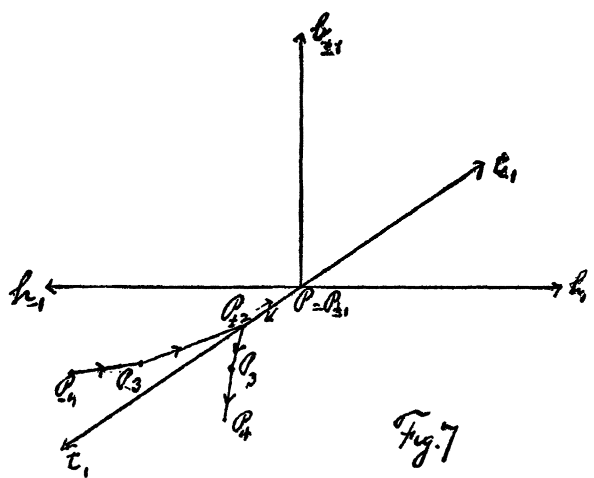
In Bezug auf die Coordinatensysteme der Fälle II, A (vgl. Fig. 3) ist für den Punct $P_{\pm 4}$ nach (12) und (4):

$$\zeta_{\pm 4} = \alpha_{\pm 1}^{\cdot\cdot}(x_{\pm 4} - x) + \ldots . + \ldots . = \tfrac{1}{24}\,\frac{\mu}{s''^3}\,\Delta_{234}\tau_4^4,$$

wo die Determinante:

$$\Delta_{234} = |x''y'''z^{(4)}| = \Delta''' \tag{20}$$

der durch die Bedingungen des Falles II, A, a reducirte 3. Differentialquotient von Δ ist.



Für $\Delta_{234} > 0$ (vgl. Fig. 7) liegt daher P_4 auf der positiven Seite der Ebene $t_1 h_1$ und P_{-4} auf der positiven von $t_{-1} h_{-1}$ (in Fig. 7 beide Puncte oberhalb der horizontalen Ebene $t_{\pm 1} h_{\pm 1}$), also ergiebt sich:

Für II, A, a ist die Windung vor dem Puncte P negativ und nach ihm positiv oder umgekehrt, jenachdem $\Delta_{234} > 0$ *oder* < 0.

Unter der Voraussetzung $\Delta_{234} = 0$ wird entsprechend:

$$\zeta_{\pm 5} = \alpha_{\pm 1}^{\cdot\cdot}(x_{\pm 5} - x) + \dots + \dots = \pm \tfrac{1}{120} \frac{\mu}{s''^3} \Delta_{235} \tau_5^5$$

mit:

$$\Delta_{235} = |x'' y''' z^{(5)}| = \tfrac{1}{3} \Delta^{(4)}. \tag{21}$$

Für II, A, b ist die Windung vor und nach dem Puncte P positiv oder negativ, jenachdem $\Delta_{235} > 0$ *oder* < 0.

In Bezug auf die Coordinatensysteme der Fälle II, B (vgl. Fig. 4) ist für die Puncte $P_{\pm 5}$ nach (15) und (4):

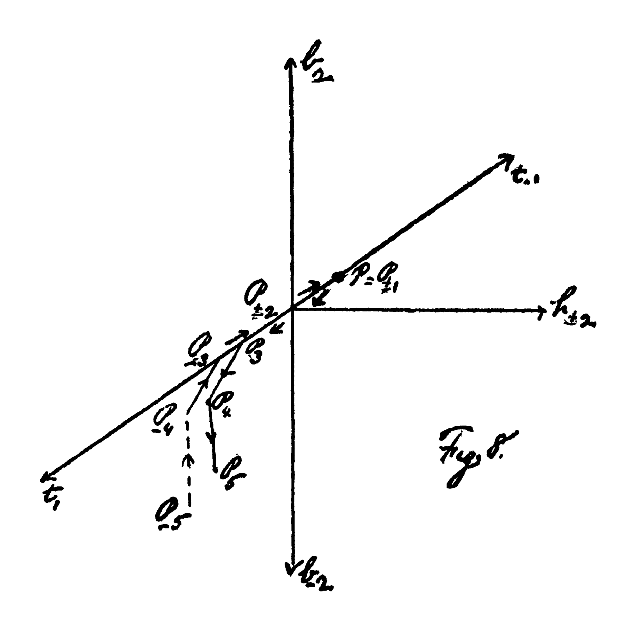
$$\zeta_{\pm 5} = \alpha_{\pm 2}^{\cdot\cdot}(x_{\pm 5} - x) + \dots + \dots = \tfrac{1}{120} \frac{\nu}{s'' s'''^2} \Delta_{245} \tau_5^5,$$

worin:

$$\Delta_{245} = |x'' y^{(4)} z^{(5)}| = \tfrac{1}{5} \Delta^{(5)} \tag{22}$$

und $\Delta^{(5)}$ den durch die Bedingungen des Falles II, B, a reducirten 5. Differentialquotienten von Δ bedeutet.

Wenn $\Delta_{245} > 0$ (vgl. Fig. 8) liegt P_5 auf der positiven Seite der Ebene $t_1 h_2$ und P_{-5} der Ebene $t_{-1} h_{-2}$ (in Fig. 8 P_5 oberhalb, P_{-5} unterhalb der horizontalen Ebene $t_{\pm 1} h_{\pm 2}$).



Für II, B, a ist die Windung vor dem Puncte P negativ und nach ihm positiv oder umgekehrt, jenachdem $\Delta_{245} > 0$ *oder* < 0.

Unter der Voraussetzung $\Delta_{245} = 0$ wird:

$$\zeta_{\pm 6} = \pm \tfrac{4}{720} \frac{v}{s'' s'''^2} \Delta_{246} \tau_6^6$$

mit:

$$\Delta_{246} = |x'' y^{(4)} z^{(6)}| = \tfrac{1}{16} \Delta^{(6)}. \tag{23}$$

Für II, B, b ist die Windung vor und nach dem Puncte P positiv oder negativ, jenachdem $\Delta_{246} > 0$ *oder* < 0.

Es ist schliesslich zu bemerken, dass diejenigen Differentialquotienten von Δ, welche bezüglich den unter (18) bis (23) angegebenen vorausgehen, in dem betreffenden Falle sämmtlich verschwinden.

§6. *Zusammenfassung der Resultate.*

Wir drücken durch Einschliessen einer Bedingung in eckige Klammern aus, dass dieselbe *nicht erfüllt* ist und *bezeichnen mit zwei nebeneinander gestellten Vorzeichen den Sinn der Windung unmittelbar vor und unmittelbar nach dem Puncte P*. Bei übereinander gestellten Zeichen: $\pm$, $\gtrless$ gehören in jeder Zeile je alle oberen und alle unteren Zeichen zusammen. Mit diesen Festsetzungen giebt

die folgende Tabelle zugleich mit den analytischen Kriterien der 8 in §§3, 5 eingeführten Fälle singulärer Puncte jedesmal den Sinn der Windung an.

I. $[x' = 0, \ y' = 0, \ z' = 0]$.

A. $[x' : y' : z' = x'' : y'' : z'']$.

a. $|x' y'' z'''| \gtrless 0 : \pm\pm$;

b. $|x' y'' z'''| = 0, \ |x' y'' z^{(4)}| \gtrless 0 : \mp\pm$.

B. $x' : y' : z' = x'' : y'' : z'', \ [x'' : y'' : z'' = x''' : y''' : z''']$.

a. $|x' y''' z^{(4)}| \gtrless 0 : \pm\pm$;

b. $|x' y''' z^{(4)}| = 0, \ |x' y''' z^{(5)}| \gtrless 0 : \mp\pm$.

II. $x' = 0, \ y' = 0, \ z' = 0, \ [x'' = 0, \ y'' = 0, \ z'' = 0]$.

A. $[x'' : y'' : z'' = x''' : y''' : z''']$.

a. $|x'' y''' z^{(4)}| \gtrless 0 : \mp\pm$;

b. $|x'' y''' z^{(4)}| = 0, \ |x'' y''' z^{(5)}| \gtrless 0 : \pm\pm$.

B. $x'' : y'' : z'' = x''' : y''' : z''', \ [x''' : y''' : z''' = x^{(4)} : y^{(4)} : z^{(4)}]$.

a. $|x'' y^{(4)} z^{(5)}| \gtrless 0 : \mp\pm$;

b. $|x'' y^{(4)} z^{(5)}| = 0, \ |x'' y^{(4)} z^{(6)}| \gtrless 0 : \pm\pm$.

Mit Rücksicht auf die Formeln (16)–(23) und die Schlussbemerkung von §5 ist die Determinante, von deren Vorzeichen in jedem Falle der Sinn der Windung abhängt, von einem numerischen Factor abgesehen, *der Werth des niedrigsten nicht verschwindenden Differentialquotienten der Determinante* Δ. Dabei ist der Sinn der Windung vor und nach dem Puncte P derselbe oder nicht derselbe, jenachdem in dem Diagonalgliede jeder Determinante die Summe der oberen Indices (Accente) gerade oder ungerade ist.

Der letztere Umstand stimmt damit überein, dass die Umkehrung der in §2 festgesetzten Durchlaufungsrichtung der Curve mit der Verwandlung des Parameters t der Gleichungen (2) in $-t$ gleichbedeutend ist. Hierbei wechseln diejenigen Determinanten das Vorzeichen, bei welchen die Summe der oberen Indices des Diagonalgliedes ungerade ist. Wenn z. B. im Falle I, A, b an der Stelle P die Determinante $|x' y'' z^{(4)}|$ positiv, also das Doppelzeichen der Windung: $-+$ ist, so ist nach Umkehrung der Durchlaufungsrichtung an derselben Stelle $|x'y''z^{(4)}|$ negativ, das Doppelzeichen der Windung: $+-$. *Bei einer Umkehrung der Durchlaufungsrichtung der Curve bleibt also das Doppelzeichen der Windung in den* 4 *Fällen I, A, a; I, B; a; II, A, b; II, B, b ungeändert, während es sich in den* 4 *übrigen Fällen umkehrt.*

Wie sich unsere Tabelle zu der sonst üblichen* Unterscheidung ihrer 8 Fälle verhält, mag noch mit einigen Worten erläutert werden.

Schon in §4 wurde erwähnt, dass der laufende Punct P der Curve in den Fällen I den Sinn seiner Fortschreitungsrichtung nicht ändert, in den Fällen II aber ändert, ein Unterschied, der mit den Symbolen $P=+$ und $P=-$ bezeichnet zu werden pflegt. In gleicher Weise werden die Symbole $t=\pm$ und $\Sigma=\pm$ für die fortschreitende oder zurückkehrende Drehung der Tangente um den laufenden Berührungspunct und der Schmiegungsebene um die laufende Tangente gebraucht.

Die Tangente t im Puncte P ist nach §4 in allen Fällen I durch die Formeln (6) bestimmt. Wir erhalten daher für die Richtungscosinus der nach vorwärts und nach rückwärts benachbarten Tangenten $t_{\pm 1}$ (vgl. §2):

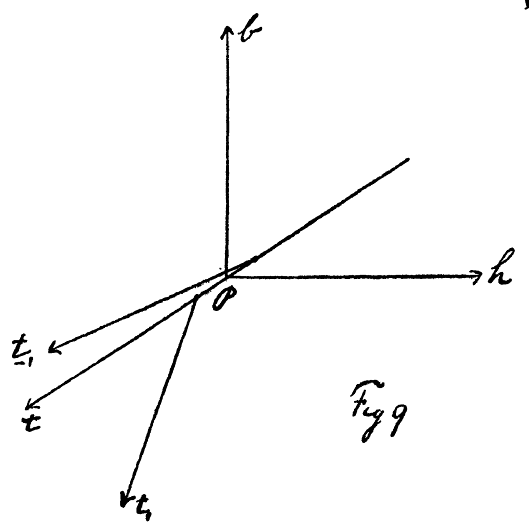
$$\alpha_{\pm 1}=\alpha\pm\alpha'\tau_1, \ldots\ldots, \ldots\ldots$$

Hier ist nach (7):

$$\alpha'=\frac{s'\alpha^{\cdot}}{\rho},$$

eine der Frenet'schen Formeln, und ergiebt sich daher für den Winkel der Tangenten $t_{\pm 1}$ gegen die positive Hauptnormale h:

$$\cos(t_{\pm 1}, h)=\alpha_{\pm 1}\alpha^{\cdot}+\ldots\ldots+\ldots\ldots=\pm\frac{s'}{\rho}\tau_1.$$



Demnach bildet t_1 mit h einen spitzen, t_{-1} einen stumpfen Winkel (vgl. Fig. 9), die Tangenten t_{-1}, t, t_{+1} folgen, von der positiven Binormale b aus

* Vgl. Ch. Wiener, a. a. O.

gesehen, im positiven Drehungssinn aufeinander. In Folge der gleichförmigen Definition der Coordinatensysteme des §4 gilt dies aber, wie leicht zu sehen, nicht nur für die Fälle I, A, sondern es dreht sich in allen Fällen beim Durchgang ihres Berührungspunctes durch die Stelle P die Tangente, *von der positiven Binormale aus gesehen, beständig im positiven Sinne.* Jenachdem daher die Binormale selbst an der Stelle P ihre Pfeilspitze beibehält (Fig. 1 und Fig. 3) oder nicht (Fig. 2 und Fig. 4), muss der Sinn der Drehung der Tangente, *von einer und derselben Seite der Schmiegungsebene aus betrachtet, bleiben oder wechseln* unbekümmert darum, dass in den Fällen II an der Stelle P, mit dem Wechsel der Pfeilspitze der Tangente, in der Drehung ein Sprung über 180° stattfindet. In dieser Auffassung ist *für die Fälle I, A und II, A*: $t = +$, *für I, B und II, B*: $t = -$.

Die Binormale b des Punctes P ist nach §4 in allen Fällen I, A durch (7) bestimmt. Wir erhalten daher für die beiderseits benachbarten Binormalen $b_{\pm 1}$ die Richtungscosinus:

$$\alpha^{\cdot\cdot}_{\pm 1} = \alpha^{\cdot\cdot} \pm \alpha^{\cdot\cdot\prime} \tau_1, \ldots\ldots, \ldots\ldots$$

Hierin ist:

$$\alpha^{\cdot\cdot\prime} = -\frac{\rho^2 \Delta}{s'^6}\alpha^{\cdot},$$

eine der Frenet'schen Formeln, die sich aus (7) durch Differentiation und geeignete Reduction ergiebt. Für die Winkel der Binormalen $b_{\pm 1}$ gegen die Hauptnormale h ergiebt sich somit:

$$\cos(b_{\pm 1}, h) = \alpha^{\cdot\cdot}_{\pm 1}\alpha^{\cdot} + \ldots\ldots + \ldots\ldots = \mp \frac{\rho^2 \Delta}{s'^6}\tau_1.$$

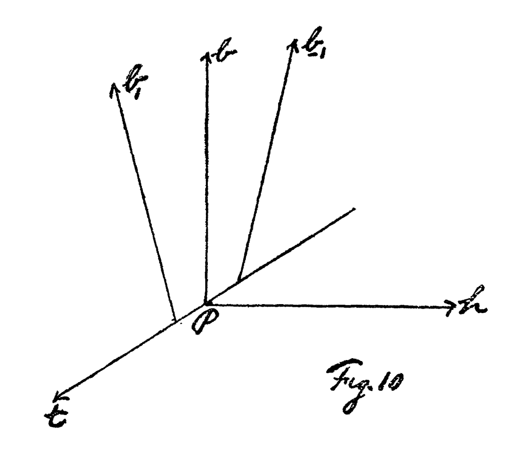


Fig. 10

Bei positivem Δ (vgl. Fig. 10) bildet also b_1 einen stumpfen, b_{-1} einen spitzen Winkel mit h, sodass von der positiven Tangente aus gesehen, die Binormalen

b_{-1}, b, b_1 im positiven Drehungssinn auf einander folgen, bei negativem Δ umgekehrt. Bezeichnen wir also durch zwei nebeneinander gestellte Vorzeichen den Sinn der Drehung der positiven Binormale unmittelbar vor und unmittelbar nach dem Puncte P, gesehen von der positiven Tangente aus, so stellt sich unser Resultat durch die Formel dar: $\Delta \gtrless 0 : \pm\pm$, übereinstimmend mit dem Doppelzeichen der Windung im Falle I, A, a. In Folge der gleichförmigen Definition der charakteristischen Coordinatensysteme des §4 und des Sinnes der Windung in §5 gilt diese Beziehung aber nicht nur im Falle I, A, a, sondern auch in allen übrigen Fällen. Es ergiebt sich damit eine zweite Bedeutung der vorhin aufgestellten Tabelle. Sie giebt, mit dem Sinn der Windung in den 8 Fällen, zugleich *den Sinn der Drehung der positiven Binormale unmittelbar vor und unmittelbar nach dem Puncte P, wie er von der positiven Tangente aus erscheint*, unbekümmert um einen in den Fällen I, B und II, B stattfindenden Sprung über 180° im Puncte P. Jenachdem daher die positive Tangente selbst in P ihre Pfeilspitze beibehält (Fälle I) oder wechselt (Fälle II), bedeutet das Symbol: $\pm\pm$ oder das Symbol $\mp\pm$ eine Erhaltung des Drehungssinnes der Binormale b oder der Schmiegungsebene Σ *für einen unveränderlichen Standpunct*. In dieser Auffassung ist für die 4 Fälle a: $\Sigma = +$, für die 4 Fälle b: $\Sigma = -$.

Nach diesen Bemerkungen können die 8 Fälle auch in der bekannten Weise bezeichnet werden:

	I				II			
	A		B		A		B	
	a	b	a	b	a	b	a	b
P	+	+	+	+	−	−	−	−
t	+	+	−	−	+	+	−	−
Σ	+	−	+	−	+	−	+	−

Während hiermit aber nur die Frage beantwortet wird, ob der Sinn der Bewegung von Punct, Tangente und Schmiegungsebene sich umkehrt oder nicht umkehrt, enthält unsere Darstellung die vollständige analytische Bestimmung des Sinnes aller dieser Bewegungen in Bezug auf das zu Grunde liegende Coordinatensystem, wie sie namentlich für die Untersuchung der Bewegung eines Punctes im Raume von Vortheil ist.

ROSTOCK, *März* 1895.